

Zadania powtórzeniowe z MATEMATYKI 3 (Równania różniczkowe)

1. Rozwiąż równania różniczkowe pierwszego rzędu:

- a)  $y' = -2xe^{-y}$     b)  $y' = \frac{x+3}{y}$ ;  $y(0) = 2$     c)  $y' = \sin^2 y$ ;  $y(0) = \frac{\pi}{2}$     d)  $y' = 2xy^2$   
 e)  $y' = -y$     f)  $y' = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$     g)  $y' = \frac{2x-y}{x}$     h)  $y' = \frac{2x-3y}{3x+5y}$     i)  $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$   
 j)  $y' + 2y = x^2e^x + \sin 2x + e^{-2x}$     k)  $y' - y = 2x \sin x$ ;  $y(0) = 1$     l)  $y' - 2xy = -x^3 + x$ ;  $y(0) = 0$   
 m)  $y' - \frac{2}{x}y = x + 1$ ;  $y(0) = -\frac{1}{2}$     n)  $(1+x^2)y' - \sqrt{1-y^2} = 0$     o)  $x(1+e^y)y' - e^y y' = 0$ ;  $y(0) = 1$   
 p)  $y' = e^{2x} - ye^x$     q)  $y' - 2y = 2e^{3x}$ ;  $y(0) = 4$     r)  $y' - 4y = 2e^{4x}$     s)  $y' + y = 2x$   
 t)  $2y' + 5y = 5 \sin x + 4 \cos x$     u)  $y' + 4y = 5 \sin 3x$     w)  $y' \sin x = y \cos x$ ;  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$   
 x)  $y' + 3y = e^{-3x} + \sin x$     y)  $y' - y = (x^2 + 7)e^{2x}$     z)  $y' = 2xy^2$ ;  $y(0) = 3$     a1)  $y' - 2xy = x$   
 b1)  $y' = \sqrt{y}e^{3x}$ ;  $y\left(\frac{1}{3}\right) = e^2$     c1)  $y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \sin x$     d1)  $y' = e^{y-3x}$ ;  $y(0) = 2$     e1)  $y' + y \cos x = x^2e^{-\sin x}$   
 f1)  $y' = \frac{y \ln x}{x}$ ;  $y(1) = 2$     g1)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{x}$     h1)  $y' = \frac{e^{4x}}{y}$ ;  $y(1) = e^2$     i1)  $y' - y \cos x = e^{\sin x} \sin x$   
 j1)  $y' + 2y = x^2 + 3e^{-2x}$ ;  $y(0) = 4$     k1)  $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$     l1)  $y' - 5x^4y = e^{x^5} \sin 2x$     m1)  $y' + 4xy = \frac{e^{-2x^2}}{x^2}$   
 n1)  $y' = \frac{\sqrt{y}}{(x+3)^5}$ ;  $y(0) = 1$     o1)  $y' = \sqrt[3]{xy}$ ;  $y(1) = 4$

2. Rozwiąż równania różniczkowe drugiego rzędu:

- a)  $y'' = -2xe^{-x}$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y'(0) = 1$     b)  $y'' = \frac{1}{x^3}$ ;  $y(1) = 1$ ;  $y'(1) = -1$     c)  $y'' - 9y' = 0$   
 d)  $y'' - 9y = 0$     e)  $y'' + 9y = 0$     f)  $y'' - 4y' + 4y = 0$     g)  $y'' + 9y = x$   
 h)  $y'' + y = x^2$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$     i)  $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(1) = 0$   
 j)  $y'' + 6y' + 9y = 3e^{-3x} + x^3$     k)  $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$     l)  $y'' + 4y = x \sin^2 x$     m)  $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$   
 n)  $y'' - 7y' + 12y = x^3e^x$     o)  $y'' - 2y' + 17y = \sin 4x$     p)  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$     q)  $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$   
 r)  $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$     s)  $y'' + 9y = x^4$     t)  $y'' + 2y' - 3y = x^3 + x$     u)  $y'' + 3y' - 4y = \cos 3x$   
 w)  $y'' - 16y = e^{4x}$     v)  $y'' + 4y' = e^{-4x} - 4x$     x)  $y'' + y = x^4$     y)  $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$     z)  $y'' - 4y = x^3 + 1$   
 a1)  $y'' - 7y' + 10y = e^{5x}$     b1)  $y'' + 4y' - 12y = e^{2x} + x$     c1)  $y'' - 4y' = x + \sin 2x$     d1)  $y'' + 3y' - 10y = e^{2x} - x$

ODPOWIEDZI:

1. a)  $y = \ln(C - x^2)$     b)  $y = \sqrt{x^2 + 6x + 4}$     c)  $y = \arccot(-x)$     d)  $y = \frac{-1}{x^2 + C}$   
 e)  $y = Ce^{-x}$     f)  $y = xe^{1+C}$     g)  $y = x - \frac{C}{x}$     h)  $5y^2 + 6xy - 2x^2 = C$     i)  $y = x^3 + Ax$   
 j)  $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + xe^{-2x}$     k)  $y = -x \sin x - (x+1) \cos x + 2e^x$     l)  $y = \frac{1}{2}x^2$   
 m)  $y = x^2 - x - \frac{1}{2}$     n)  $y = \sin(C + \arctg x)$     o)  $y = \ln(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1)$     p)  $y = e^x - 1 + Ae^{-e^x}$     q)  $y = 2e^{3x} + 2e^{2x}$   
 r)  $y = (2x+C)e^{4x}$     s)  $y = Ce^{-x} + 2x - 2$     t)  $y = Ce^{-\frac{5}{2}x} - \frac{33}{29} \sin x + \frac{10}{29} \cos x$     u)  $y = Ce^{-4x} + \frac{3}{4} \sin 3x - \frac{3}{5} \cos 3x$   
 w)  $y = 5 \sin x$     x)  $y = xe^{-3x} + \frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x$     y)  $y = Ce^x + (x^2 - 2x + 9)e^{2x}$     z)  $y = \frac{3}{1-3x^2}$     a1)  $y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$   
 b1)  $y = \frac{1}{9}(2e^{3x} + e)^2$     c1)  $y = (-\cos x + A)e^{\frac{1}{x}}$     d1)  $y = -\ln\left|\frac{1}{3}(e^{-3x} - 1) + e^{-2}\right|$     e1)  $y = \left(\frac{1}{3}x^3 + A\right)e^{-\sin x}$   
 f1)  $y = 2e^{\frac{1}{2} \ln^2 x}$     g1)  $y = \frac{e^{3x} + A}{3x}$     h1)  $y = \sqrt{\frac{1}{2}(e^{4x} + e^4)}$     i1)  $y = (-\cos x + A)e^{\sin x}$   
 j1)  $y = \frac{15}{4}e^{-2x} + 3xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$     k1)  $y = (x+A)e^{\sqrt{x}}$     l1)  $y = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + A\right)e^{x^5}$     m1)  $y = \left(-\frac{1}{x} + A\right)e^{-2x^2}$   
 n1)  $y = \left(\frac{649}{648} - \frac{1}{8(x+3)^4}\right)^2$     o1)  $y = \left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{5} + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{3}}$

2. a)  $y = -2xe^{-x} - 4e^{-x} - x + 6$     b)  $y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x + 1$     c)  $y = C_1 + C_2e^{9x}$     d)  $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$   
 e)  $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$     f)  $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$     g)  $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}x$   
 h)  $y = 2 \sin x + 2 \cos x + x^2 - 2$     i)  $y = \left(x + \frac{3}{5}\right)e^{-3x} + \frac{1}{5}(4 \sin x - 3 \cos x)$   
 j)  $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{3}{2}x^2e^{-3x} + \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{81}$   
 k)  $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + \frac{1}{4}xe^{5x}$     l)  $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x \cos 2x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x$   
 m)  $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + xe^{-x} - \frac{1}{2}e^x$     n)  $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + e^x\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 + \frac{19}{36}x + \frac{7}{18}\right)$   
 o)  $y = C_1e^x \cos 4x + C_2e^x \sin 4x + \frac{1}{65} \sin 4x + \frac{8}{65} \cos 4x$     p)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|$   
 q)  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \arctg(e^x)$     r)  $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + \frac{1}{4}xe^{5x}$   
 s)  $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{243}$     t)  $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{17}{9}x - \frac{46}{27}$   
 u)  $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} + \frac{9}{250} \sin(3x) - \frac{13}{250} \cos(3x)$     w)  $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{8}xe^{4x}$   
 v)  $y = C_1 + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$     x)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^4 - 12x^2 + 24$     y)  $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + \frac{1}{4}xe^{5x}$   
 z)  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$     a1)  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + \frac{1}{3}xe^{5x}$     b1)  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x} + \frac{1}{8}xe^{2x} - \frac{1}{12}x - \frac{1}{36}$   
 c1)  $y = C_1 + C_2e^{4x} - \frac{1}{20} \sin 2x + \frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x$     d1)  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{7}xe^{2x} - \frac{1}{10}x - \frac{3}{100}$