

1. Oblicz całki podwójne: a) $\iint_G (x^2 + y) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$
- b) $\iint_G (2x + y) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} y = 3 - x \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ c) $\iint_G (x + 6y) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} y = x \\ y = 5x \\ x = 1 \end{cases}$
- d) $\iint_G (x + \cos(x + y)) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \\ y = 0 \end{cases}$ e) $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $G : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$
- f) $\iint_G (x + 3y) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \\ y \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ g) $\iint_G (x^2 y + x) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$
- h) $\iint_G (x^2 y) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 2 - x \\ y \geq 1 - \frac{1}{2}x \end{cases}$ i) $\iint_G (\frac{x^2}{y^2}) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq x \\ xy \geq 1 \end{cases}$
- j) $\iint_G (\cos(x + y)) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x \\ y \leq \pi \end{cases}$ k) $\iint_G (xe^y + 3y^2 - 1) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$
- l) $\iint_G (3x - y) dx dy$ gdzie $G : \begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq 0 \end{cases}$ m) $\iint_G (x + 5y) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 6 \\ x \leq 0 \end{cases}$
- n) $\iint_G (y - 3x) dx dy$, gdzie $G : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \leq 0, y \leq x \end{cases}$ o) $\iint_G (2x + 4y) dx dy$ gdzie $G : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 8 \\ y \leq 0, -x \geq y \end{cases}$
- p) $\iint_G (3 - xy) dx dy$ gdzie G trójkąt o wierzchołkach: (2, 2), (1, 1), (0, 2)
- q) $\iint_G (1 + y\sqrt[3]{x}) dx dy$ gdzie G trójkąt o wierzchołkach: (1, 3), (2, 2), (1, 1)
- r) $\iint_G (1 - 2x^3 y) dx dy$ gdzie G trójkąt o wierzchołkach: (0, 1), (0, -1), (2, 0)
- s) $\iint_G (1 - 5x^2 y) dx dy$ gdzie G trójkąt o wierzchołkach: (0, 0), (2, -1), (2, 1)
2. Oblicz całki potrójne: a) $\iiint_V (\frac{1}{(1+x+y+z)^3}) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$
- b) $\iiint_V (z) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$ c) $\iiint_V (z) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} z \leq 1 \\ z^2 \geq x^2 + y^2 \end{cases}$
- d) $\iiint_V (x) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ y \leq 4 \\ x + z \leq 3 \end{cases}$ e) $\iiint_V (1 + x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$
- f) $\iiint_V (z) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ g) $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$
- h) $\iiint_V (x^2 z) dx dy dz$, gdzie $V : \begin{cases} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \end{cases}$ i) $\iiint_V (1 + x) dx dy dz$, $V : \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \geq z \end{cases}$
- j) $\iiint_V (1 + y) dx dy dz$, $V : \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z \end{cases}$ k) $\iiint_V (x - y) dx dy dz$, $V : \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$

3. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami: a) $V : \begin{cases} z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 6 - z \leq x^2 + y^2 \end{cases}$ b) $V : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

c) $V : \begin{cases} x + 2y \leq 1 \\ z \leq x^2 + y + 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$ d) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \\ z \leq 4 \end{cases}$ e) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3z \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$ f) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z \leq xy \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

g) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 - z \\ z \geq 0 \end{cases}$ h) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z \leq x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$ i) $V : \begin{cases} z \geq x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 12 \end{cases}$ j) $V : \begin{cases} z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \leq 12 - x^2 - y^2 \end{cases}$

k) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z \geq x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \end{cases}$ l) $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \leq 8 - x^2 - y^2 \end{cases}$ m) $V : \begin{cases} z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 9 - x^2 - y^2 \geq z \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ n) $V : \begin{cases} z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

ODPOWIEDZI:

1. a) $\frac{33}{140}$ b) $\frac{27}{2}$ c) $\frac{76}{3}$ d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 + \sin 2$ e) $\frac{3\pi}{2}$ f) $\frac{4}{3} - 4\sqrt{3}$ g) $\frac{1377}{140}$ h) $\frac{2}{5}$ i) $\frac{9}{4}$ j) -2

k) $\frac{205}{4} - 36e^3 + 6e^{-2} + \frac{195}{16}\pi$ l) $\frac{4}{3}(4 - \sqrt{2})$ m) $-\frac{4}{3}(3\sqrt{6} - 4)$ n) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)(3 - 2\sqrt{2})$ o) $\frac{1}{3}(-61\sqrt{2} - 32)$

p) $\frac{4}{3}$ q) $\frac{1}{7}(36\sqrt[3]{2} - 23)$ r) 2 s) 2

2. a) $\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 9 e) 24π f) $\frac{1}{24}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{243}{8}\pi$ i) $2\pi + \frac{32}{5}$ j) $2\pi + \frac{32}{5}$ k) 0

3. a) $\frac{32}{5}\pi$ b) $\frac{7}{6}\pi$ c) $\frac{3}{8}$ d) 8π e) $\frac{19}{6}\pi$ f) 2π g) 8π h) $\frac{2}{3}\pi$ i) $(32\sqrt{3} - 45)\frac{\pi}{2}$ j) $\frac{99}{2}\pi$

k) $\frac{\pi}{6}(105 - 64\sqrt{2})$ l) $\frac{41}{6}\pi$ m) $\frac{10}{3}\pi$ n) $\frac{14}{3}\pi$