Całki wielokrotne

Całka podwójna

$$\iint_G f(x, y)dxdy$$

G - zdefiniowany obszar

UWAGA: Będziemy liczyć tylko całki z funkcji ciągłych po obszarach ograniczonych, a więc całka podwójna to ZAWSZE będzie całka oznaczona!
W wyniku zawsze otrzymamy LICZBĘ.

Całka podwójna
Jeśli $f(x, y) \geqslant 0$ dla $(x, y) \in G$, to całka podwójna równa się objętości pod wykresem funkcji:

$$|V| = \iint\limits_G f(x, y) dxdy$$

Całka podwójna Riemanna

$$\iint\limits_G f(G)dG = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k)$$

Całki wielokrotne

Twierdzenie:
Całka podwójna w prostokącie istnieje, jeśli funkcja jest w tym prostokącie ograniczona i ciągła.

Całka iterowana

Jeśli funkcja f jest ciągła w prostokącie
$P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, p \leqslant y \leqslant q\}$, to:

$$\iint\limits_{P} f(x, y) dx dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{p}^{q} f(x, y) dy = \int\limits_{p}^{q} dy \int\limits_{a}^{b} f(x, y) dx$$

Całki wielokrotne

Przykład 1.
Oblicz całkę: $\iint\limits_G (x \sin y) dxdy$ jeśli: $G = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leqslant x \leqslant 3, \frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi\}$
Rozwiązanie:

$$\iint\limits_G (x \sin y) dxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x \sin y) dy = \int\limits_1^3 dx([-x \cos y]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}) = \int\limits_1^3 dx(-x \cos \pi - (-x \cos \tfrac{\pi}{2})) =$$

$$\int\limits_1^3 (-(-1)x - 0x) dx = \int\limits_1^3 x dx = [\tfrac{1}{2} x^2]_1^3 = \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2} = 4$$

Można też zrobić to w innej kolejności:

$$\iint\limits_G (x \sin y) dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy \int\limits_1^3 (x \sin y) dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy([\tfrac{1}{2} x^2 \sin y]_1^3) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy(\tfrac{9}{2} \sin y - \tfrac{1}{2} \sin y) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4 \sin y) dy =$$

$$[-4 \cos y]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -4 \cos \pi - (-4 \cos \tfrac{\pi}{2}) = -4(-1 - 0) = 4$$

Całki wielokrotne

Całka podwójna po zbiorze dowolnym

G ograniczony zbiór na płaszczyźnie,
P kwadrat zawierający zbiór G.
Definiujemy:

$$f_G(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in G \\ 0 & (x,y) \in P \setminus G \end{cases}$$

Jeśli istnieje całka $\iint\limits_P f_G(x,y)dxdy$ przyjmujemy:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_P f_G(x,y)dxdy$$

Obszar normalny względem osi Ox

Jeśli w przedziale $< a, b >$ funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe i wewnątrz tego przedziału spełniają nierówność $p(x) < q(x)$, to obszar G określony:

$$G = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, p(x) \leqslant y \leqslant q(x)\}$$

nazywamy **obszarem normalnym względem osi** Ox**.**

Całki wielokrotne

Uwaga:
Każdy obszar normalny jest ograniczony i domknięty, więc każda funkcja ciągła w tym obszarze jest w tym obszarze ograniczona.

Całka podwójna w obszarze normalnym:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Przykład 2.
Oblicz całkę: $\iint\limits_G (x^3 y)dxdy$ jeśli: G to trójkąt o wierzchołkach $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(1,2)$.

Rozwiązanie:
Najpierw trzeba znaleźć opis obszaru, tutaj najprościej jako obszaru normalnego względem osi Ox:

$$G = \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

A zatem obliczamy całkę iterowaną:

$$\iint\limits_G (x^3 y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^2 (x^3 y)dy = \int\limits_1^2 dx[x^3 \cdot \tfrac{1}{2} y^2]_x^2 = \int\limits_1^2 dx[x^3 \cdot \tfrac{1}{2} 2^2 - x^3 \cdot \tfrac{1}{2} x^2] = \int\limits_1^2 (2x^3 - \tfrac{1}{2} x^5)dx =$$
$$[2 \cdot \tfrac{1}{4} x^4 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} x^6]_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2^4 - \tfrac{1}{12} \cdot 2^6 - (\tfrac{1}{2} \cdot 1^4 - \tfrac{1}{12} \cdot 1^6) = 8 - \tfrac{16}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{96-64-6+1}{12} = \tfrac{27}{12} = \tfrac{9}{4}$$

Obszar normalny względem osi Oy

Jeśli w przedziale $< p, q >$ funkcje $a(y)$ i $b(y)$ są ciągłe i wewnątrz tego przedziału spełniają nierówność $a(y) < b(y)$, to obszar D określony:

$$G = \{(x, y) : a(y) \leqslant x \leqslant b(y), p \leqslant y \leqslant q\}$$

nazywamy **obszarem normalnym względem osi** Oy**.**

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_p^q dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

Przykład 2.cd.
Oblicz całkę: $\iint\limits_G (x^3 y)dxdy$ jeśli: G to trójkąt o wierzchołkach $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(1,2)$.
Rozwiązanie:

W tym wypadku obszar możemy opisać rownież jako obszar normalny względem osi Oy: $G = \begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ 1 \leqslant x \leqslant y \end{cases}$

W tym wypadku obliczamy całkę iterowaną:

$$\iint\limits_G (x^3 y)dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y (x^3 y)dx = \int\limits_1^2 dy [\tfrac{1}{4}x^4 \cdot y]_1^y = \int\limits_1^2 dy [\tfrac{1}{4}y^4 \cdot y - \tfrac{1}{4}1^4 \cdot y] = \int\limits_1^2 (\tfrac{1}{4}y^5 - \tfrac{1}{4}y)dy =$$
$$[\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{6}y^6 - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}y^2]_1^2 = \tfrac{1}{24} \cdot 2^6 - \tfrac{1}{8} \cdot 2^2 - (\tfrac{1}{24} \cdot 1^6 - \tfrac{1}{8} \cdot 1^2) = \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{64-12-1+3}{24} = \tfrac{54}{24} = \tfrac{9}{4}$$

Całki wielokrotne

Przykład 3.
Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,1,0)$ i $D(0,0,6)$.

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzoru na objętość ostrosłupa mamy: $|V| = \frac{1}{3}P \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 6 = 2$
Wykorzystując całkę podwójną mamy: $|V| = \iint\limits_G (6-6y-3x)dxdy$ gdzie G to trójkąt ABC.

Obszar całkowania możemy opisać jako obszar normalny względem osi Ox: $G = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{1}{2}x \end{cases}$

$$|V| = \iint\limits_G (6-6y-3x)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{1}{2}x} (6-6y-3x)dy = \int\limits_0^2 dx([6y-3y^2-3xy]_0^{1-\frac{1}{2}x}) =$$
$$\int\limits_0^2 dx(6(1-\tfrac{1}{2}x) - 3(1-\tfrac{1}{2}x)^2 - 3x(1-\tfrac{1}{2}x) - (6\cdot 0 - 3(0)^2 - 3x\cdot 0)) = \int\limits_0^2 (\tfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3)dx =$$
$$[\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 3x]_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot 2^3 - \tfrac{3}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - (\tfrac{1}{4}\cdot 0^3 - \tfrac{3}{2}\cdot 0^2 + 3\cdot 0) = \tfrac{8}{4} - \tfrac{12}{2} + 6 = 2 - 6 + 6 = 2$$

Przykład 4.
Oblicz objętość pod wykresem $f(x, y) = \sin(x + y)$ nad obszarem ogrniczonym prostymi: $y = 0$; $x = 0$, $x + y = \pi$.

Rozwiązanie:

Obszar całkowania możemy opisać jako obszar normalny względem osi Ox: $G = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi - x \end{cases}$

$$|V| = \iint\limits_G \sin(x + y)dxdy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\pi - x} \sin(x + y)dy = \int\limits_0^{\pi} dx([-\cos(x + y)]_0^{\pi - x}) =$$
$$= \int\limits_0^{\pi} dx(-\cos(x + (\pi - x)) - (-\cos(x + 0))) = \int\limits_0^{\pi} (-\cos(\pi) + \cos x)dx = \int\limits_0^{\pi} (1 + \cos x)dx = [x + \sin x]_0^{\pi} =$$
$$\pi + \sin \pi - 0 - \sin 0 = \pi$$

Całki wielokrotne

Obszar domknięty nazywamy **regularnym** jeśli jest sumą obszarów normalnych (względem osi Ox lub osi Oy), które nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \ldots \cup G_n$$

Własności całki podwójnej

f, f_1, f_2 funkcje ciągłe i ograniczone, G, G_1, G_2 obszary domknięte regularne.

1. $|G| = \iint\limits_G dxdy$
2. $\iint\limits_G k \cdot f(x,y)dxdy = k \cdot \iint\limits_G f(x,y)dxdy$
3. $\iint\limits_G [f_1(x,y) + f_2(x,y)]dxdy =$
   $\iint\limits_G f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_G f_2(x,y)dxdy$
4. $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$, jeśli $G = G_1 \cup G_2$ oraz G_1 i G_2 nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

Przykład 5.
Oblicz pole obszaru ograniczonego prostą $y = 1$ i parbolą $y = x^2$.

Rozwiązanie:

Obszar całkowania możemy opisać jako obszar normalny względem osi Ox: $G = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$

$$|G| = \iint\limits_G 1dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy = \int\limits_{-1}^{1} dx([y]_{x^2}^{1}) = \int\limits_{-1}^{1} dx(1 - x^2) = \int\limits_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = [x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} =$$
$$1 - \tfrac{1}{3} - ((-1) - \tfrac{1}{3}(-1)^3) = 1 - \tfrac{1}{3} + 1 - \tfrac{1}{3} = 2 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}$$

Przykład 6.

Oblicz całkę podwójną $\iint\limits_G (x-y-2)dxdy$ dla obszaru G ograniczonego od dołu osią $0x$ a od góry parabolą $y = 1 - x^2$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 0$ i prostą $y = 1 - x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Rozwiązanie:

Obszar całkowania dzielimy na dwa obszary: $G = G_1 \cup G_2$ i każdy z tych obszarów opisujemy oddzielnie:

$$G_1 = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2 \end{cases} \quad \text{oraz } G_2 = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \end{cases}$$

$$\iint\limits_G (x-y-2)dxdy = \iint\limits_{G_1} (x-y-2)dxdy + \iint\limits_{G_2} (x-y-2)dxdy = -\tfrac{37}{20} - 1 = -\tfrac{57}{20}$$

$$\iint\limits_{G_1} (x-y-2)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} (x-y-2)dy = \int\limits_{-1}^{0} dx([xy - \tfrac{1}{2}y^2 - 2y]_0^{1-x^2}) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dx(x(1-x^2) - \tfrac{1}{2}(1-x^2)^2 - 2(1-x^2) - 0) = \int\limits_{-1}^{0} (-\tfrac{1}{2}x^4 - x^3 + 3x^2 + x - \tfrac{5}{2})dx =$$

$$[-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{4}x^4 + x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{5}{2}x]_{-1}^{0} = 0 - (-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}(-1)^5 - \tfrac{1}{4}(-1)^4 + (-1)^3 + \tfrac{1}{2}(-1)^2 - \tfrac{5}{2}(-1)) =$$

$$-\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{4} + 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} = \tfrac{-2+5+20-10-50}{20} = -\tfrac{37}{20}$$

$$\iint\limits_{G_2} (x-y-2)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} (x-y-2)dy = \int\limits_{0}^{1} dx([xy - \tfrac{1}{2}y^2 - 2y]_0^{1-x}) =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx(x(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2 - 2(1-x) - 0) = \int\limits_{0}^{1} (-\tfrac{3}{2}x^2 + 4x - \tfrac{5}{2})dx = [-\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \tfrac{5}{2}x]_0^1 =$$

$$-\tfrac{1}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{4} + 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} = -1$$

Całki wielokrotne

Przykład 6.a.
Oblicz całkę podwójną $\iint\limits_G (x-y-2)dxdy$ dla obszaru G ograniczonego od dołu osią $0x$ a od góry parabolą $y=1-x^2$ dla $-1\leqslant x\leqslant 0$ i prostą $y=1-x$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$.
Inne rozwiązanie:

Obszar G można też opisać jako jeden, ale względem osi $0y$: $G=\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 1 \\ -\sqrt{1-y}\leqslant x\leqslant 1-y \end{cases}$

$$\iint\limits_G (x-y-2)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{1-y}(x-y-2)dx=\int\limits_0^1 dy([\tfrac{1}{2}x^2-xy-2x]_{-\sqrt{1-y}}^{1-y})=$$

$$=\int\limits_0^1 dy(\tfrac{1}{2}(1-y)^2-(1-y)y-2(1-y)-(\tfrac{1}{2}(-\sqrt{1-y})^2-(-\sqrt{1-y})y-2(-\sqrt{1-y}))=$$

$$=\int\limits_0^1(\tfrac{3}{2}y^2+\tfrac{1}{2}y-2-y\sqrt{1-y}-2\sqrt{1-y})dy=[\tfrac{1}{2}y^3+\tfrac{1}{4}y^2-2y-\tfrac{2}{5}(1-y)^{\frac{5}{2}}+2(1-y)^{\frac{3}{2}}]_0^1=$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot 1^3+\tfrac{1}{4}\cdot 1^2-2\cdot 1-\tfrac{2}{5}(1-1)^{\frac{5}{2}}+2(1-1)^{\frac{3}{2}}-(\tfrac{1}{2}0^3+\tfrac{1}{4}0^2-2\cdot 0-\tfrac{2}{5}(1-0)^{\frac{5}{2}}+2(1-0)^{\frac{3}{2}})=$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-2+\tfrac{2}{5}-2=\frac{10+5-40+8-40}{20}=-\frac{57}{20}$$