Zadania powtórzeniowe do I sprawdzianu z MATEMATYKI 3 (Rachunek prawdopodobieństwa)

**1.** Na pikniku wydziałowym można wylosować burgera z pudełka, gdzie są 3 burgery Bekonator, 5 burgerów Rogerek i 8 burgerów Belmondo. Jeśli wylosujemy Bekonatora, to losujemy napój z przenośnej lodówki, gdzie są 2 cole i 4 fanty, jeśli wylosujemy Rogerka, to losujemy napój z drugiej przenośnej lodówki, gdzie są 3 cole i 3 fanty, a jeśli wylosujemy Belmondo, to losujemy napój z trzeciej przenośnej lodówki, gdzie jest 1 cola i 5 fant. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy colę? Jakie jest prawdopodobieństwo, że na początku wylosowaliśmy Bekonatora, skoro pijemy colę?

**2.** Na pikniku wydziałowym do przeciągania liny zgłosiły się dwa zespoły po pięć osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedy ustawią się przy linie, najmłodsze osoby w każdym zespole będą na końcu?

**3.** W szufladzie jest 15 różnych par skarpet. a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeśli wylosujemy dwie skarpetki, to będą do pary? b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeśli wylosujemy trzy skarpetki, to dwie będą do pary? c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeśli wylosujemy pięć skarpetek, to będzie co najmniej jedna para?

**4.** Rzucamy 10 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie 5 razy wypadnie orzeł?

**5.** Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń; A - suma oczek jest nie większa niż 4; B - na co najmniej jednej kostce wypadły 2 oczka; C - co najmniej na jednej kostce wypadły 2 oczka i suma oczek nie większa niż 4; D - suma oczek otrzymanych na obu kostkach nie większa niż 4 pod warunkiem, że co najmneij na jednej kostce wypadły dwa oczka.

**6.** Mamy 4 urny. W pierwszej znajduje się 999 kul białych i jedna czarna, w pozostałych jest po jednej kuli białej i jednej czarnej. Z losowo wybranej urny losujemy jedną kulę. a) Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągnięto kulę czarną. b) Oblicz prawdopodobieństwo, że kulę wylosowano z pierwszej urny, skoro wyciągnięto kulę czarną.

**7.** Z talii 52 kart losujemy jednocześnie 6 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart będą karty wszystkich czterech kolorów?

**8.** Z talii 52 kart losujemy dwie karty bez zwrotu. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania asa z pozostałych 50 kart, jeśli nie wiadomo, jakie karty zostały uprzednio wyciągnięte?

**9.** Z talii 52 kart losujemy trzy razy po jednej karcie bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej dwie z wylosowanych kart to asy?

**10.** Rzucamy 2 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że za drugim razem wypadnie większa liczba oczek niż za pierwszym?

**11.** Podczas zajęć na strzelnicy strzał ma oddać jeden z pięciu żołnierzy. Pierwszy z nich trafia z prawdopodobieństwem 0,7, drugi z prawdopodobieństwem 0,6, trzeci 0,8, czwarty 0,5, a piąty 0,9. Rzucają cztery razy monetą. Jeśli pierwszy wypadł orzeł, strzela pierwszy żołnierz. Jeśli orzeł wypadł dopiero jako drugi, strzela drugi żołnierz. Jeśli orzeł wypadł dopiero jako trzeci, strzela trzeci żołnierz. Jeśli orzeł wypadł dopiero na końcu, strzela czwarty żołnierz. A jeśli wypadły same reszki, strzela piąty żołnierz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że strzał był celny? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadły same reszki, skoro strzał był celny?

**12.** W magazynie znajduje się 10 niwelatorów wyprodukowanych w fabryce A, 20 niwelatorów wyprodukowanych w fabryce B i 30 wyprodukowanych w fabryce C. Wadliwość produkcji fabryki A wynosi 1%, fabryki B 5%, a fabryki C 7%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany niwelator będzie wadliwy? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany wadliwy niwelator wyprodukowano w fabryce C?

**13.** Zmienna losowa $X$ ma następujący rozkład prawdopodobieństwa: $P(X=-3)=\frac{1}{20}$, $P(X=-2)=\frac{3}{20}$, $P(X=-1)=\frac{1}{20}$, $P(X=0)=\frac{5}{20}$, $P(X=1)=\frac{4}{20}$, $P(X=2)=\frac{4}{20}$, $P(X=3)=a$. Oblicz $a$. Oblicz dystrybuantę, wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**14.** Zmienna losowa $X$ ma następujący rozkład prawdopodobieństwa: $P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=\sqrt{2})=\frac{1}{5}$, $P(X=\sqrt{8})=a$, $P(X=\sqrt{32})=\frac{1}{5}$, $P(X=\sqrt{128})=\frac{1}{4}$. Oblicz $a$. Oblicz dystrybuantę, wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**15.** Dystrybuanta zmiennej losowej $X$ dana jest wzorem: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{7} & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{3}{7} & \text{dla } 2 < x \leqslant 5, \\ \frac{6}{7} & \text{dla } 5 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{dla } 10 < x. \end{cases}$

a) Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $X$. b) Obliczyć $P(5 \leqslant X \leqslant 8)$, $P(0 < X < 5)$, $P(1 < X \leqslant 7)$, $P(2 \leqslant X < 10)$. c) Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**16.** Podać rozkład zmiennej losowej $X$, która przyjmuje wartości równe sumie oczek na dwóch kostkach do gry. Określić jej dystrybuantę i narysować jej wykres. Obliczyć $P(5 \leqslant X \leqslant 8)$, $P(0 < X < 5)$, $P(3 < X \leqslant 7)$, $P(4 \leqslant X < 10)$. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**17.** Zmienna losowa $X$ podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ C\sin x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\Pi}{3}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\Pi}{3} < x. \end{cases}$
Obliczyć stałą $C$. Określić dystrybuantę zmiennej $X$. Narysować wykresy gęstości i dystrybuanty.
Obliczyć $P(\frac{\Pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{\Pi}{4})$. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**18.** Zmienna losowa $X$ podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1, \\ \ln x & \text{dla } 1 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{dla } a < x. \end{cases}$
Obliczyć stałą $a$. Określić dystrybuantę zmiennej $X$. Narysować wykresy gęstości i dystrybuanty.
Obliczyć $P(2 \leqslant X \leqslant e)$. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**19.** Zmienna losowa $X$ podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant |x|, \\ \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} & \text{dla } 1 \geqslant |x|. \end{cases}$
Obliczyć stałą $C$. Określić dystrybuantę zmiennej $X$. Narysować wykresy gęstości i dystrybuanty. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe zmiennej $X$.

**20.** Zmienna losowa $X$ podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem: $f(x) = \frac{a}{e^x+e^{-x}}$ dla $x \in (-\infty, \infty)$
Obliczyć stałą $a$. Określić dystrybuantę zmiennej $X$. Obliczyć $P(X < 1)$.

**21.** Prawdopodobieństwo trafienia do celu wynosi $p = 0,8$. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w 16 niezależnych strzałach: 2 razy, 8 razy, co najmniej raz. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień przy 16 niezależnych strzałach?

**22.** Wiedząc, że zmienna losowa $X \sim Pois(4)$ oblicz (korzystając z tablic): $P(X = 7)$, $P(3 < X < 6)$, $P(3 \leqslant X < 6)$, $P(3 < X \leqslant 6)$, $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$, $P(1 \leqslant X)$.

**23.** Wiedząc, że zmienna losowa $X \sim N(7, 4)$ oblicz (korzystając z tablic): $P(X < 5)$, $P(3 < X < 8)$, $P(X > 4)$, $P(X < 0)$.

**24.** Wiedząc, że zmienna losowa $X \sim N(3, 5)$ oblicz (korzystając z tablic): $P(X < -2)$, $P(X < 4)$, $P(-1 < X < 1)$, $P(X > 5)$, $P(X < 0)$.

ODPOWIEDZI: **1.** $\frac{29}{96}$, $\frac{6}{29}$ **2.** $\frac{1}{25}$ **3.** a) $P(A) = \frac{1}{29}$, b) $P(B) = \frac{3}{29}$, c) $P(C) = \frac{85}{261}$ **4.** $\frac{63}{256}$ **5.** $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{11}{36}$; $P(C) = \frac{1}{12}$; $P(D) = \frac{3}{11}$. **6.** a) 0.003976 b) 0.00067 **7.** 0.4265 **8.** $\frac{1}{13}$ **9.** $\frac{73}{5525}$ **10.** $\frac{5}{12}$ **11.** $\frac{11}{16}$, $\frac{9}{110}$ **12.** $\frac{4}{75}$, $\frac{21}{32}$

**13.** $a = 0.1$, $EX = 0.4$, $D^2X = 2.84$, $DX = 1.68$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant -3, \\ \frac{1}{20} & \text{dla } -3 < x \leqslant -2, \\ \frac{4}{20} & \text{dla } -2 < x \leqslant -1, \\ \frac{5}{20} & \text{dla } -1 < x \leqslant 0, \\ \frac{10}{20} & \text{dla } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{14}{20} & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{18}{20} & \text{dla } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{dla } 3 < x. \end{cases}$

**14.** $a = 0.1$, $EX = \frac{5+64\sqrt{2}}{20}$, $D^2X = 17.04$, $DX = 4.13$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4} & \text{dla } 1 < x \leqslant \sqrt{2}, \\ \frac{9}{20} & \text{dla } \sqrt{2} < x \leqslant \sqrt{8}, \\ \frac{11}{20} & \text{dla } \sqrt{8} < x \leqslant \sqrt{32}, \\ \frac{15}{20} & \text{dla } \sqrt{32} < x \leqslant \sqrt{128}, \\ 1 & \text{dla } \sqrt{128} < x. \end{cases}$

**15.** a) $P(X = 1) = \frac{1}{7}$, $P(X = 2) = \frac{2}{7}$, $P(X = 5) = \frac{3}{7}$, $P(X = 10) = \frac{1}{7}$; b) $P(5 \leqslant X \leqslant 8) = \frac{3}{7}$, $P(0 < X < 5) = \frac{3}{7}$, $P(1 < X \leqslant 7) = \frac{5}{7}$, $P(2 \leqslant X < 10) = \frac{5}{7}$; c) $EX = \frac{30}{7}$, $D^2X = \frac{388}{49}$, $DX = 2,814$.

**16.** $P(X = 2) = \frac{1}{36}$, $P(X = 3) = \frac{2}{36}$, $P(X = 4) = \frac{3}{36}$, $P(X = 5) = \frac{4}{36}$, $P(X = 6) = \frac{5}{36}$, $P(X = 7) = \frac{6}{36}$, $P(X = 8) = \frac{5}{36}$, $P(X = 9) = \frac{4}{36}$, $P(X = 10) = \frac{3}{36}$, $P(X = 11) = \frac{2}{36}$, $P(X = 12) = \frac{1}{36}$. Dla $x \leqslant 2$ $F(x) = 0$, dla $2 < x \leqslant 3$ $F(x) = \frac{1}{36}$, dla $3 < x \leqslant 4$ $F(x) = \frac{3}{36}$, dla $4 < x \leqslant 5$ $F(x) = \frac{6}{36}$, dla $5 < x \leqslant 6$ $F(x) = \frac{10}{36}$, dla $6 < x \leqslant 7$ $F(x) = \frac{15}{36}$, dla $7 < x \leqslant 8$ $F(x) = \frac{21}{36}$, dla $8 < x \leqslant 9$ $F(x) = \frac{26}{36}$, dla $9 < x \leqslant 10$ $F(x) = \frac{30}{36}$, dla $10 < x \leqslant 11$ $F(x) = \frac{33}{36}$, dla $11 < x \leqslant 12$ $F(x) = \frac{35}{36}$, dla $12 < x$ $F(x) = 1$. $P(5 \leqslant X \leqslant 8) = \frac{20}{36}$, $P(0 < X < 5) = \frac{6}{36}$, $P(3 < X \leqslant 7) = \frac{18}{36}$, $P(4 \leqslant X < 10) = \frac{27}{36}$; c) $EX = 7$, $D^2X = \frac{35}{6}$, $DX = 2,415$.

**17.** $C = 2$. Dla $x \leqslant 0$ $F(x) = 0$, dla $0 < x \leqslant \frac{\Pi}{3}$ $F(x) = 2(1 - \cos x)$, dla $\frac{\Pi}{3} < x$ $F(x) = 1$. $P(\frac{\Pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{\Pi}{4}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. $EX = \frac{3\sqrt{3}-\Pi}{6}$, $D^2X = \frac{3-\Pi^2+6\Pi\sqrt{3}}{12}$, $DX = \sqrt{\frac{3-\Pi^2+6\Pi\sqrt{3}}{12}}$. **18.** $a = e$. Dla $x \leqslant 1$ $F(x) = 0$, dla $1 < x \leqslant e$ $F(x) = x(\ln x - 1) + 1$, dla $e < x$ $F(x) = 1$. $P(2 \leqslant X \leqslant e) = 2(1 - \ln 2)$. $EX = \frac{1+e^2}{4}$, $D^2X = \frac{8e^3-3e^4-6e^2+2}{48}$, $DX = \sqrt{\frac{8e^3-3e^4-6e^2+2}{48}}$. **19.** $C = \frac{1}{\Pi}$. Dla $x \leqslant -1$ $F(x) = 0$, dla $-1 < x \leqslant 1$ $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi} \arcsin x$, dla $1 < x$ $F(x) = 1$. $EX = 0$, $D^2X = \frac{1}{2}$, $DX = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **20.** $a = \frac{2}{\Pi}$. $F(x) = \frac{2}{\Pi} \operatorname{arc\,tg} e^x$. $P(X < 1) = \frac{2}{\Pi} \operatorname{arc\,tg} e$

**21.** $P(X = 2) = \binom{16}{2}(0,8)^2(0,2)^{14}$; $P(X = 8) = \binom{16}{8}(0,8)^8(0,2)^8$; $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,2)^{16}$; $k_0 = 13$;

**22.** $P(X = 7) = 0,0595$; $P(3 < X < 6) = 0,3517$; $P(3 \leqslant X < 6) = 0,5471$; $P(3 < X \leqslant 6) = 0,4559$; $P(3 \leqslant X \leqslant 6) = 0,6513$; $P(1 \leqslant X) = 0,9817$

**23.** $P(X < 5) = 0,3083$; $P(3 < X < 8) = 0,44$; $P(X > 4) = 0,7734$; $P(X < 0) = 0,0401$

**24.** $P(X < -2) = 0,1587$; $P(X < 4) = 0,5793$; $P(-1 < X < 1) = 0,1327$; $P(X > 5) = 0,3446$; $P(X < 0) = 0,2743$